

关于用格林函数求解重入型谐振腔问题的讨论

任列辉¹, 宋文淼¹, 瞿 波², 朱 敏²

(1. 中国科学院电子学研究所, 北京 100080; 2. 北京真空电子技术研究所, 北京 100016)

摘 要: 本文讨论了用经典场论和算子理论求解重入型谐振腔的格林函数问题. 首先讨论了经典场论中用 H_e 的格林函数进行场匹配的方法, 推导和讨论了 H_e 的格林函数方程组、边界条件和格林函数的求解方法. 这一方法只能用于回旋对称模式. 为了解决耦合腔的问题需要高次模的格林函数, 本文用算子理论求解了高次模的格林函数. 这一格林函数对于零模与经典场论完全一致. 本文也给出了高次模的格林函数、边界匹配方法和本征值的数值计算. 这些工作为非轴对称耦合腔系统的分析和计算准备了必要的条件.

关键词: 电磁场算子理论; 格林函数; 耦合谐振腔; 本征值

中图分类号: TN814 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2005) 03-0447-05

Discussion on the Problems of Reentrant Electromagnetic Resonant Cavity by Green's Function

REN Lie-hui¹, SONG Wen-miao¹, QU Bo², ZHU Ming²

(1. Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China; 2. Beijing Vacuum Electronics Technology Institute, Beijing 100016, China)

Abstract: The problems on solving resonant frequency of an reentrant cavity by classical electromagnetic theory and operator theory are discussed. The classical method for boundary field matching by Green's function of H_e is discussed firstly. The equation set for Green's function, the boundary conditions and method for solving Green's function are all given. This method can be only used for zero order mode. For higher order modes operator theory is used. The Green's functions of higher order modes, the method for boundary field matching and the calculation for eigenvalues of higher order modes are given. It is an essential condition for solving the problems of axially unsymmetrical coupled cavities system.

Key words: operator theory of electromagnetic field; Green's function; coupled resonant cavity; eigenvalues

1 引言

用格林函数求解复合系统的谐振腔问题曾引起过广泛的讨论^[1~4]. 由于考虑到解的完备性, 经典场论中电磁场的并矢格林函数表示形式十分复杂, 限制了它的实际应用. 因而在这些文献中所用的都是标量格林函数, 即只是考虑对回旋对称系统的最低模式的特殊情况. 在经典场论中更常用的是通过本征函数展开来匹配耦合边界上的“阻抗”, 并以此来求复合系统的本征值^[5]. 尽管这一方法也能得到与格林函数方法同样的结果, 但是在理论上缺乏严格性. 电磁场算子理论把并矢格林函数化为两个标量格林函数进行运算^[6~8], 从而解决了经典场论中并矢格林函数的复杂形式和“奇异项”在实际应用中造成的困难. 采用这种标量化的并矢格林函数形式可以解决含有 TE 和 TM 耦合的复杂电磁系统的边值问题^[7~10], 从而为解决存在孪生模系统的本征值问题的解析方法创造了条件. 对于直角坐标下具有孪生模的三维系统本征值问题以解析为基础的求解方法也已经基本解决. 圆柱坐标下这类复合系统的本征值问题在大功率微波器件和电路中有广泛的应用

价值, 解决圆柱坐标系统下复合结构的本征值问题, 就可以用解析方法解决诸如谐振腔和环杆型的慢波结构的电路特性. 从对于回旋对称重入式谐振腔最低模式的解析方法^[1~4]中可以看到, 这种方法在理论上是精确解, 计算量少而且达到了很高的精度. 但是在对圆柱系统的三维复合结构, 即具有非轴对称模式, 或对称问题的高次模的计算时却遇到了一些困难. 本文的目的就是讨论经典场论中求解重入型谐振腔所存在的问题, 以及电磁场算子理论怎样解决这个问题, 从而为解决三维系统的问题打下基础.

2 经典场论中关于格林函数和场匹配的基本方法及存在问题

我们讨论如图 1 所示的重入式谐振腔系统. 为了对这一结构进行分析, 可以把它看成由 II 区的高圆环和 I 区的扁圆柱这样两个圆柱坐标下的规则系统所组成的, 通过共同边界 S_1 耦合在一起的复合系统. 文献[1]是一种对于窄隙缝近似下结果, 那里假定了除基模

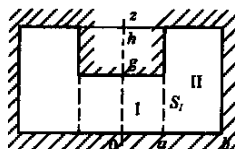


图1 重入式圆柱形谐振腔

外所有高次模式在 r 方向的场都是虚宗量贝塞尔函数, 这样可以减少由于场匹配不严格性所产生的误差. 文中对于场的匹配是近似的, 计算结果频率的相对误差仍有 1% 左右. 文献 [2] 不再作窄隙缝的假定, 这是由于该文中找到了一种新的边界场匹配方法, 在任意隙缝下的误差也已经远小于 1%, 这一误差不仅有计算上的原因, 可能也有测量上的原因. 但是这两篇文献中只给出了格林函数的形式而没有说明这一格林函数是怎样得到的. 文献 [3] 所用的方法与上两篇文献一致, 不仅应用到了双重入腔内部而且还有处于截止状态的无限长漂移管更复杂的情况, 不但给出了格林函数的表达式, 还给出了求解这一格林函数所用的方程, 计算结果与实验相比有极高的精度. 本文主要讨论文献 [3] 的工作, 为了简化起见, 只考虑单重入腔的情况. 首先在经典场论一般只能考虑基模 TM₀₁₀, 因此腔内的场只存在 E_z 和 H_ϕ 且各个场分量都与 ϕ 无关.

假定在匹配边界上存在切向电场 E_z , 各个区域中由匹配边界上的切向电场所激发的 H_ϕ 可以由下面的积分式来表示:

$$H_\phi^I(r, z) = i\omega\epsilon_0 \int_0^g E_z G_H^I(r, z, a, z') dz' \quad (1)$$

$$H_\phi^{II}(r, z) = i\omega\epsilon_0 \int_0^g E_z G_H^{II}(r, z, a, z') dz' \quad (2)$$

而格林函数满足:

$$\begin{cases} \text{在区域 } v \text{ 内, } \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} - \frac{G}{r^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + k^2 G \\ \quad = -\delta(r-r')\delta(z-z') \\ \text{在边界 } S_d \text{ 上, } \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial(rG)}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

这里 G 可以用来表示 G^I 和 G^{II} , 只要把域 v 和完纯导体边界 S_d 分别选为 I 区和 II 区的域和包括匹配边界 S_l 的完整边界, 因为只有对于完纯导体边界的规则系统才有可能求解其格林函数. 在文献 [2] 中指出了这一格林函数是圆柱坐标系中二维标量亥姆霍兹算子的格林函数, 但没有给出求解格林函数所用的方程, 文献 [3] 中才给出了这个方程组. 为了使每个区域中的场与腔体相应部分的场一致, 必须假定在公共边界上有虚设的面磁流密度, 所谓面磁流密度是由切向电场不连续所引起的, 所以用格林函数 G 表示的是 H_ϕ 的格林函数. 对于边界条件的说明, 通常电磁理论的著作中只给出磁场的法向场边界条件: $\hat{n} \cdot \mathbf{H} = 0$ 即 $H_n = 0$. 由于腔内只存在 H_ϕ , 在边界上只存在切向磁场, 它的边界条件必须从电场的边界条件 $\hat{n} \times \mathbf{E} = 0$ 出发, 再用磁场来表示电场才能得到:

$$\hat{n} \times \nabla \times \mathbf{H} = \hat{n} \nabla \times H_\phi \hat{\phi} = \hat{n} \times \left[\hat{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial z} - \hat{z} \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r} \right] = 0 \quad (4)$$

G 应满足 H_ϕ 同样的边界条件, 因而对于端面 $\hat{n} = \hat{z}$, 式 (4) 的第二项自动为零, 而对于柱面 $\hat{n} = \hat{r}$, 第一项自动为零, 这样就得到式 (3) 中的两个边界条件. 在两个区域可以把格林函数分别表示为:

$$\begin{cases} G^I(r, z, r', z') = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2-\delta_m^0}{g} \cos \frac{m\pi z}{g} \cos \frac{m\pi z'}{g} G_m^I(r, r') \\ G^{II}(r, z, r', z') = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2-\delta_m^0}{h} \cos \frac{m\pi z}{h} \cos \frac{m\pi z'}{h} G_m^{II}(r, r') \end{cases} \quad (5)$$

G^I 和 G^{II} 分别为 I 区和 II 区的二维的格林函数, ϕ 方向为零模, 场与 ϕ 无关. $G_m^I(r, r')$ 和 $G_m^{II}(r, r')$ 为 z 方向为 m 次模式时 r 方向的格林函数, 方程和边界条件为:

$$\begin{cases} \text{在域 } v \text{ 内, } \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} - \frac{G}{r^2} + k^2 G = -\delta(r-r') \\ \text{在边界 } S_d \text{ 内, } \frac{1}{r} \frac{\partial(rG)}{\partial r} = G' + \frac{G}{r} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

该方程的解为一阶贝塞尔方程的格林函数, 其边界条件比较特殊. 但是可以用拉格朗日方法来进行求解, 只是在应用边界条件时要稍作些变化, 下面给出用特解表示的格林函数的一般形式, 这里现考虑 II 区, 即内外半径分别为 a 和 b :

$$G(r, r') = \begin{cases} C_1 J_1(kr) + C_2 N_1(kr), & a \leq r \leq r' \leq b \\ C_3 J_1(kr) + C_4 N_1(kr), & a \leq r' \leq r \leq b \end{cases} \quad (7)$$

对式 (7) 求导在加上式 (7) 除以 r , 并利用贝塞尔函数的递推公式 $J_{l+1} = J_l - \frac{J_l}{r}$ 和 $N_{l+1} = N_l - \frac{N_l}{r}$ 得到:

$$G'(r, r') + \frac{G(r, r')}{r} = \begin{cases} C_1 J_0(kr) + C_2 N_0(kr), & a \leq r \leq r' \leq b \\ C_3 J_0(kr) + C_4 N_0(kr), & a \leq r' \leq r \leq b \end{cases} \quad (8)$$

代入边界条件得:

$$\frac{C_1}{C_2} = -\frac{N_0(ka)}{J_0(ka)} \text{ 和 } \frac{C_3}{C_4} = -\frac{N_0(kb)}{J_0(kb)} \quad (9)$$

有了这一关系, 四个待定常数减少为两个, 利用源上格林函数连续和源上格林函数导数的跃度可以求出另外两个待定常数, 并加入 z 方向的模数和 II 区标记, 得到:

$$G_m^{II}(a, a) = \begin{cases} \frac{J_1(k_m 2a) N_0(k_m 2b) - J_0(k_m 2b) N_1(k_m 2a)}{k_m 2 [J_0(k_m 2a) N_0(k_m 2b) - J_0(k_m 2b) N_1(k_m 2a)]} \\ k > \frac{m\pi}{h} \\ \frac{I_1(k_m 2a) K_0(k_m 2b) + I_0(k_m 2b) K_1(k_m 2a)}{k_m 2 [I_0(k_m 2a) K_0(k_m 2b) - I_0(k_m 2b) K_1(k_m 2a)]} \\ k < \frac{m\pi}{h} \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{其中, } k_{m2} = \sqrt{1 - k^2 - [(m\pi)/h]^2} \quad (11)$$

对于 I 区由于包含了轴的自然边界条件, 诺伊曼函数消失, 只有贝塞尔函数, 即如下所示:

$$G_m^I(a, a) = \begin{cases} \frac{J_1(k_{m1} a)}{k_{m1} J_0(k_{m1} a)}, & k > \frac{m\pi}{g} \\ \frac{I_1(k_{m1} a)}{k_{m1} I_0(k_{m1} a)}, & k < \frac{m\pi}{g} \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{其中, } k_{m1} = \sqrt{1 - k^2 - [(m\pi)/g]^2} \quad (13)$$

有了格林函数后, 就可以代入式 (1) 和 (2), 再把 E_z 在 $\cos\left(\frac{m\pi z}{g}\right)$ 上展开, 并以 $\cos\left(\frac{m\pi z}{g}\right)$ 权函数对式 (1) 和 (2) 取内积, 就可以把两式等起来成为代数方程组.

3 用电磁场算子理论求解重入腔的格林函数

为了精确求解如耦合腔系统那类具有非轴对称系统的本征值问题, 第一步必须解决高次模的求解问题, 应用上面的方

法来求解非回旋对称的高次模式的场匹配有一定的困难. 本文中我们将讨论对于 TM 模的圆柱坐标系统中如何用高阶格林函数的普遍形式来进行边界场匹配的问题, 求出对于高阶模式匹配的普遍形式. 下面我们可以看到在这一方法中也可以得到一个类似于式(10)和(12)的函数形式, 但那个函数不再是 H_φ 的格林函数, 只有在 φ 方向为零模时才可以得到与 H_φ 的格林函数相同的形式, 其他情况下很不容易得到 H_φ 的格林函数形式. 在文献[9]和[10]中已经详细讨论了电磁场量子理论是怎样来解决复合系统的边界匹配以及如何在边界匹配的基础上解决直角坐标下三维复合系统的本征值问题, 在那里本征方程可以表示为:

$$\sum_v \int_{S_1} \frac{1}{\mu^2 - k^2} \int_{S_1} F_{II}(\mu, R) \cdot F_I(x, R) |_{S_1} ds \int_{S_1} F_{II}(\mu, R') \cdot F_I(v, R') |_{S_1} ds' + \sum_\lambda \frac{1}{\lambda^2 - k^2} \int_{S_1} F_I(\lambda, R) \cdot F_I(x, R) |_{S_1} ds \int_{S_1} F_I(\lambda, R') \cdot F_I(v, R') |_{S_1} ds' = 0 \quad (14)$$

这里 F_I 和 F_{II} 分别为 I 区和 II 区的磁矢量波函数, 对于 μ 和 λ 的级数就是格林函数. 一个完整的本征函数系应该包含 TE 和 TM 两类模式, 但在考虑回旋对称的情况下, TE 和 TM 模是独立的. 为了简化起见, 这里只讨论 TM 模, 这时磁矢量波函数常称为 N 类磁矢量波函数, 可以表示为:

$$F_{n\lambda} = \frac{1}{k_c} \nabla \times \phi_{n\lambda}(r, \varphi, z) \hat{z} \quad (15)$$

其中 $\phi_{n\lambda}$ 应满足

$$\begin{cases} \text{在域 } v \text{ 内,} & \nabla_{n\lambda}^2 \phi_{n\lambda} = 0 \\ \text{在边界 } S_\perp \text{ 上,} & \phi_{n\lambda} = 0 \\ \text{在边界 } S_\parallel \text{ 上,} & \frac{\partial \phi_{n\lambda}}{\partial z} \end{cases} \quad (16)$$

这些公式可以用于 I 区和 II 区. 其中边界 S 包括所有的导体边界和匹配边界即 I 区和 II 区的整个边界, S_\perp 为法向与领示矢量垂直的面即柱面, S_\parallel 为法向与领示矢量平行的面即端面. 现在的方法与以前经典场论中所用方法的差别在于: 不再把式(15)中的场表示成欧氏空间中的展开式, 而是把式(15)直接代入匹配方程式(14), 通过旋量场算子的特性把旋量场内积的积分变换成相应的标量函数乘积的积分, 直接得到本征方程组中的矩阵元, 矩阵元素的形式与经典场论中对于回旋对称模式的矩阵元素类似, 将其格林函数部分与经典场论中 H_φ 的格林函数比较就可以看出两者的差别. 把式(15)中的 N 类磁矢量波函数代入式(14)的积分, 可以得到:

$$\int_{S_1} F_n^I(v, R) |_{S_1} \cdot F_n^{II}(\mu, R) ds = \int_{S_1} \frac{1}{I_{n1}} \nabla \times \phi_n^I |_{S_1} \cdot \frac{1}{I_{n2}} \nabla \times \phi_n^{II} ds = \int_{S_1} \frac{1}{I_{n1} I_{n2}} \frac{\partial \phi_n^I}{\partial r} |_{S_1} \frac{\partial \phi_n^{II}}{\partial r} ds \quad (17)$$

I_{n1} 和 I_{n2} 是归一化常数. 以上公式与坐标系统的选择没有关系, 只需其中一个基矢是常矢量就可以应用, 所以同样可以用到圆柱坐标. 圆柱坐标下对 TM 模积分内的旋量场的完整表达式应有 H_φ 和 H_r 两项, 但是 H_r 在匹配边界上的值为零, 所以最后的标量函数乘积积分中实际上就是本征函数 H_φ 的乘

积和归一化系数. 把式(17)代入式(14), 就可以得到矩阵元素, 从而求解本征方程组. 为此直接写出式(15)在 φ 方向也考虑高次模时本征函数系的完整形式:

$$\begin{cases} \phi_n^I(r, \varphi, z) = \cos n\varphi \cos \frac{m\pi z}{g} B_n^I(k_{mn1}r) \\ \phi_n^{II}(r, \varphi, z) = \cos n\varphi \cos \frac{m\pi z}{h} B_n^{II}(k_{mn2}r) \end{cases} \quad (18)$$

这里, $B_n^I(k_{mn1}r)$ 和 $B_n^{II}(k_{mn2}r)$ 分别为 I 和 II 区满足第一类齐次边界条件的 n 阶贝塞尔方程的本征函数. 在具有非回旋对称的耦合槽时, 耦合腔中的场就要考虑 TM 和 TE 模的组合, 为了简化起见, 这里只考虑 TM 模. 这相当于我们仍不考虑三维的情况, 只计算对于 TM 模的各个独立的高次模式. 这时不必计算对于 n 的和式, 代入式(14), 所有 φ 方向的函数可以消去, 但是 r 方向的本征函数中已经包含了贝塞尔函数的阶数, 也就有了 φ 方向的不同模数. 下面只要把这些结果代入式(14)的本征方程, 积分式用式(17), 再代入式(18)并略去 $\cos n\varphi$, 所得到的矩阵元素除了能考虑高次模外, 其基模应与文献[3]中的矩阵元一致. 同样可以把矩阵元分成 $W^{(1)}$ 和 $W^{(2)}$ 两部分, 下面只写出矩阵元中 I 区与 II 区的本征函数乘积的积分部分:

$$\begin{aligned} W^{(2)} = & \sum_{j=0}^{N'} \sum_{m=1}^{M'} \sqrt{\frac{(2-\delta_1^0)}{g}} \sqrt{\frac{(2-\delta_1^0)(2-\delta_j^0)}{g}} \frac{(2-\delta_j^0)}{h} \\ & \cdot \frac{1}{k_{mn2}^2 - [k^2 - (j\pi/h)^2]} \int_0^g \cos \frac{j\pi}{g} z \cos \frac{j\pi}{h} z dz \\ & \cdot \frac{\partial}{\partial r} B_n^{II}(k_{mn2}r) \cdot \int_0^g \cos \frac{j\pi}{g} z \cos \frac{j\pi}{h} z dz' \frac{\partial}{\partial r} B_n^{II}(k_{mn2}r') \end{aligned} \quad (19)$$

这里保留了下标 n , 它只出现在贝塞尔函数的阶数中, 实际上是对每一个高阶模式 n 独立地进行计算. 对于 z 方向的积分与直角坐标系统中完全一样, 我们关心的只是 r 方向的 n 阶贝塞尔函数 $B_n^{II}(k_{mn2}r)$ 的求和问题, 下面把它用方括号括起来:

$$\begin{aligned} W^{(2)} = & \sum_{j=0}^{N'} \sqrt{\frac{(2-\delta_1^0)}{g}} \sqrt{\frac{(2-\delta_1^0)(2-\delta_j^0)}{g}} \frac{(2-\delta_j^0)}{h} \int_0^g dz' \int_0^g dz \\ & \left[\sum_{m=1}^{M'} \frac{1}{k_{mn2}^2 - [k^2 - (j\pi/h)^2]} \frac{\partial}{\partial r} B_n^{II}(k_{mn2}r) \frac{\partial}{\partial r} B_n^{II}(k_{mn2}r') \right] \\ & \cdot \left\{ \cos \frac{j\pi}{g} z \cos \frac{j\pi}{h} z \cos \frac{j\pi}{g} z' \cos \frac{j\pi}{h} z' \right\} \\ = & \sum_{j=0}^{N'} \sqrt{\frac{(2-\delta_1^0)}{g}} \sqrt{\frac{(2-\delta_1^0)}{g}} \frac{(2-\delta_j^0)}{h} \int_0^g \cos \frac{j\pi}{g} z \cos \frac{j\pi}{h} z dz \int_0^g \cos \frac{j\pi}{g} z' \cos \frac{j\pi}{h} z' dz' G_h^{II}(r, r') \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{则 } G_h^{II}(r, r') = \sum_{m=1}^{M'} \frac{1}{k_{mn2}^2 - \left[k^2 - \left(\frac{j\pi}{h} \right)^2 \right]} \frac{\partial}{\partial r} B_n^{II}(k_{mn2}r) \frac{\partial}{\partial r} B_n^{II}(k_{mn2}r') \quad (21)$$

这里 G_h^{II} 就是对于 φ 方向为 n 次模式时所对应的 H_φ 的格林函数, 回旋对称情况下的零阶贝塞尔函数取导数成为一阶贝塞尔函数, 所以这一格林函数的方程式就是上一节中的式(6).

对于高阶模要求 H_φ 的格林函数是非常困难的,这是因为从算子理论来看,欧氏空间的射影不一定是纯旋量场,它并不能反映电磁波模式的所有性质,所以我们不再用 H_φ 的格林函数.从式(21)可以把偏微分移到和式的外面,即:

$$G_h^{\text{II}}(r, r') = \frac{\partial^2}{\partial r \partial r'} \left\{ \sum_{m=1}^M \frac{1}{k_{mn}^2 - [k^2 - (j\pi/h)^2]} B_n^{\text{I}}(k_{mn}r) \cdot B_n^{\text{I}}(k_{mn}r') \right\} = \frac{\partial^2}{\partial r \partial r'} G_h^{\text{II}}(r, r') \quad (22)$$

这里的 G_h^{II} 是对 ψ_n 中关于 r 的函数来求其格林函数,亦 n 阶贝塞尔方程在第一类齐次边界条件下的格林函数.这一典型的格林函数问题在各种参考书中都有它的解,但是要注意的是矩阵元素中所用的不是 G_h^{II} ,而是 G_h^{I} , G_h^{II} 不是直接求,而是求出 G_h^{II} 后对 r 和 r' 取偏微分得到,这样就有:

$$G_h^{\text{II}}(r, a) = \begin{cases} \frac{J_n(k_g r) N_n(k_g b) - J_n(k_g b) N'_n(k_g r)}{k_g [J_n(k_g a) N_n(k_g b) - J_n(k_g b) N_n(k_g a)]} & k > \frac{j\pi}{h} \\ \frac{I_n(k_g r) K_n(k_g b) - I_n(k_g b) K'_n(k_g r)}{k_g [I_n(k_g a) K_n(k_g b) - I_n(k_g b) K_n(k_g a)]} & k < \frac{j\pi}{h} \end{cases} \quad (23)$$

其中 $k_g = \sqrt{|k^2 - (j\pi/h)^2|}$. 对于 φ 方向零模就是和前面完全相同的结果,对高次模则需保持微分的形式.从这里看出电磁场算子理论与经典场论的差别,电磁场算子理论在处理矢量形式的电磁波时,总是在纯旋量场空间内进行,电磁波在算子空间的子空间之间的正交性使它总是能进行模式的分离,分离为单一的 TM 或 TE 模式后就可以把矢量问题变换为标量问题,由标量函数再去表达场在欧氏空间中的射影形式.经典场论中一般都是直接处理欧氏空间中的场分量,这一场分量不是纯旋量场,处理起来需要特别的小心.

4 计算结果和小结

这里的工作是为计算耦合腔系统的传输特性做准备的,耦合腔系统是非轴对称的周期系统,它应同时包含 TE 和 TM 两类模式,在耦合时必须考虑两类模式的高次模,此外还要考虑周期系统的特性. TM 模的高次模计算是首先要解决的问题,限于本文篇幅,不再进一步讨论那些与非轴对称系统的本征模求解有关的问题,而只限于 TM 模的探讨和计算.

本征方程组(14)是无限维的,实际计算中总是将其截断为有限维方程组.作为一个为典型的例子,我们对某一腔体的

进行了详细的计算,腔体的几何尺寸是 $g = 7.958$, $h = 22.792$, $a = 6.004$, $b = 42.29$, 在计算中取 $N' = 11$, $x = v = 1, 2 \dots N$, 取不同的 N 值分别计算腔体的谐振频率.计算结果如图 2 和图 3 所示,图 2 是关于第一个模式的本征值,图 3 是关于第二个模式的本征值,可以看出本征值随着 N 的增加迅速地收敛.其中对第一个模式有冷测值对比,当取 $N = 11$ 时,误差仅为 0.17%,即使取 $N = 5$,误差也只有 0.25%,这说明只需要取前面几个本征函数展开项就可以达到较高的精度.这在本征向量的计算值中也得到体现,在表 1 中列出了这两个模式各自的本征向量计算值.

表 1 典型腔体的本征向量计算值

	第一个模式的本征向量	第二个模式的本征向量
A_0	-0.8887	-0.8390
A_1	0.2619	0.3262
A_2	-0.1698	-0.2017
A_3	0.1380	0.1609
A_4	-0.1271	-0.1462
A_5	0.1592	0.1797
A_6	-0.1313	-0.1507
A_7	0.1069	0.1232
A_8	-0.0909	-0.1050
A_9	0.0794	0.0918
A_{10}	-0.0705	-0.0817
A_{11}	0.0636	0.0736

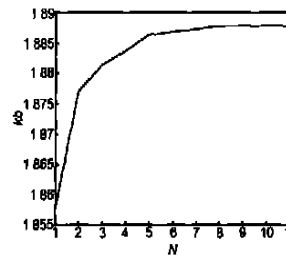


图 2 第一个模式的本征值随着本征函数展开项数 N 增加的计算结果

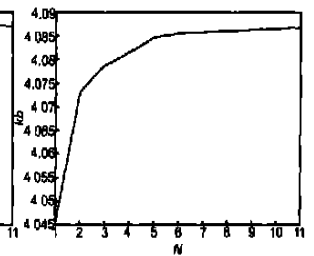


图 3 第二个模式的本征值随着本征函数展开项数 N 增加的计算结果

对几种不同结构尺寸的重入腔进行了计算,计算值和冷测值^[11]同样符合得很好.结果见表 2 所示:

由于第二个模式不易找到可以与之比较的现成结果.所以计算了本征值与重入腔隙缝高度 g 的变化关系.腔体的结构尺寸为: $h = 22.792$, $a = 6.004$, $b = 42.29$, g 从 7.958 增大到 21.958 过程中最开始的两个模式(分别对应于 TM010 模和

表 2 对几种不同尺寸的重入腔本文计算的谐振频率和实验测量结果的比较

h (mm)	g (mm)	a (mm)	b (mm)	f (GHz, 本文计算)	f (GHz, 实验测量)
22.792	7.958	6.004	42.29	2.1313	2.135
34.826	8.028	5.992	13.80	2.3349	2.326
31.806	7.984	5.9935	20.99	2.2842	2.280
28.019	7.999	5.999	29.988	2.2276	2.2264
31.806	7.980	3.495	20.99	2.4030	2.394

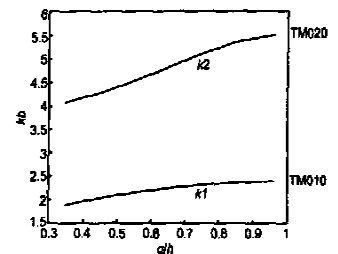


图 4 重入式圆柱形谐振腔对应于 TM010 模和 TM020 模的本征值随着隙缝高度的变化

TM020 模)的本征值变化结果如图 4 所示,当 $g \rightarrow h$ 时,重入腔最开始的两个本征值 k_1 和 k_2 恰好分别平滑地趋于规则的外圆柱体的 TM010 模的本征值 0.0569 和 TM020 模的本征值 0.1305,在这里图中横轴用 g/h ,纵轴用 kb .

本文用算子理论求解了高次模的格林函数,这一格林函数对于零模与经典场论完全一致,文中也给出了高次模的格林函数、边界匹配方法和本征值的计算,这些工作为非轴对称耦合腔系统的计算准备了必要的条件.由于耦合腔系统是非轴对称的周期系统,它应同时包含 TE 和 TM 两类模式.在耦合时必须同时考虑两类模式的高次模,这正是后面工作要进一步研究的.

参考文献:

- [1] A G MILLAMSON. The resonant frequency and tuning characteristics of a narrow gap reentrant cylindrical cavity[J]. IEEE Trans MTT, 1976, 24(4): 182- 187.
- [2] M JAWORSKI. On the resonant frequency of a resonant cylindrical cavity [J]. IEEE Trans MTT, 1987, 26(4): 256- 260.
- [3] 朱敏, 吴鸿适. 速调管双重入腔的计算[J]. 电子学报, 1981, 9(4): 8- 15.
- [4] 张昭洪, 吴鸿适. 耦合腔慢波结构特性研究[J]. 电子学报, 1986, 14(1): 7- 15.
- [5] 宋文森, 李镇淮. 双重入腔的场计算[J]. 电子科学学刊, 1987, 9(5): 441- 450.
- [6] 宋文森. 求解电磁场并矢格林函数的新方法[J]. 电子科学学刊, 1989, 11(2): 164- 175.

- [7] 宋文森. 并矢格林函数和电磁场的算子理论[M]. 合肥: 中国科技大学出版社, 1991. 331- 360.
- [8] 宋文森. 矢量偏微分算子-现代电磁场理论的数学基础[M]. 北京: 科学出版社, 1999. 126- 157.
- [9] XU CHENG, ZHANG XIAOJUAN, SONG WENMIAO. Calculating the cutoff frequencies of heteromorphic waveguide by operator theory[A]. 5th International Symposium on Antenna, Propagation and EM Theory [C]. Beijing: Electronic Industrial Press, 2000. 281- 284.
- [10] 邢锋, 徐诚, 王颖, 刘韦, 宋文森. 用电磁场算子理论求波导复合系统的本征值[J]. 电子与信息学报, 2003, 25(7): 975- 981.
- [11] K UENAKADA. LCR equivalent circuit of reentrant cavity resonator [J]. Trans Inst Electron Communication Eng, 1970, 53(B): 51- 58.

作者简介:



任列辉 男, 1975 年 11 月出生于云南曲靖, 现为中科院电子所助理研究员, 在职博士生, 主要研究方向为电磁场与微波技术. E-mail: rllh19@hotmail.com

宋文森 男, 1938 年 5 月出生于浙江镇海, 现为中科院电子所研究员, 博士生导师, 主要研究方向为电磁场与微波技术, 著有专著 3 本, 发表论文 100 多篇.